МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ВОСТОЧНОУКРАИНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени ВЛАДИМИРА ДАЛЯ
Краснодонский факультет инженерии и менеджмента

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к самостоятельной работе по изучению дисциплины

“ТЕОРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ”

КРАСНОДОН 2009

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ВОСТОЧНОУКРАИНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени Владимира Даля

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к самостоятельной работе по изучению дисциплины

“ТЕОРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ”

Утверждено на заседании

Кафедры “ЕФД”.

Протокол № 2 от 1 октября 2009 г.

КРАСНОДОН 2009

УДК 629

Теория технических систем (методические указания к самостоятельной работе по изучению дисциплины для студентов обучающихся по направлению подготовки "Автомобильный транспорт 6.070106", "Машиностроение 6.050503") /Сост.: Д.В. Дуда. - Краснодон: ВНУ им. Даля, 2009. – 26 с.

Методические указания разработаны и призваны помочь студентам самостоятельно изучить курс "Теории технических систем" и научиться решать задачи на нахождение наименее надежных элементов узлов и агрегатов с использованием математического аппарата, а также решать задачи на поиск оптимальных планов производств, при помощи линейного программирования графическим способом.

Методические указания включают общую методику изучения курса, рекомендуемую литературу, пояснения по изучаемому материалу, контрольные вопросы для самопроверки, тематику заданий для контрольных работ.

Составитель Д.В. Дуда, асс.

Ответственный за выпуск М.Д. Аптекарь, проф.

Рецензент В.А. Колесников, доц.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Основным видом занятий студентов при изучении курса является самостоятельная работа над учебным материалом, включающая следующие элементы: посещение лекций; изучение дисциплины по учебникам и учебным пособиям; выполнение контрольной работы; индивидуальные консультации. Завершающим этапом изучения курса является сдача зачета (защита контрольной работы) в соответствии с учебным планом.

Работа с книгой. Изучать курс рекомендуется по темам, предварительно ознакомившись с содержанием каждой из них по программе. Вначале надо стараться получить общее представление об излагаемом материале, отмечая трудные и неясные места, не задерживаясь на математических выводах (первое чтение). При повторном чтении следует усвоить все теоретические положения, формулы, и их выводы.

Для лучшего запоминания и усвоения изучаемого материала необходимо вести конспект по основным теоретическим положениям. С целью систематизации материала рекомендуется составлять графики, схемы, таблицы, что облегчит его запоминание и уменьшит объем конспекта.

Контрольная работа. В процессе изучения курса студент должен выполнить контрольную работу, главная цель которой - оказать помощь в усвоении материала. Целесообразно приступить к выполнению работы после усвоения определенной части курса, соответствующей теме работы.

Рецензия на работу позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывая на имеющиеся пробелы и помогая сформулировать вопросы преподавателю на консультации.

Консультации. В случае затруднений при изучении курса студент должен обратиться к преподавателю для получения консультации, точно указывая, в чем он испытывает затруднение. За консультацией следует также обращаться по вопросам организации самостоятельной работы.

Лекции и практические работы. Все виды занятий проводятся в соответствии с графиком выполнения учебного процесса. На лекциях глубоко и детально рассматриваются принципиальные проблемные вопросы, составляющие теоретический фундамент курса; кроме того, читаются установочные и обзорные лекции по отдельным его разделам. На практических занятиях детально прорабатываются отдельные вопросы.

Зачет. Для сдачи зачета необходимо прочное и глубокое усвоение всех теоретических, практических вопросов программы и умение применять полученные знания к анализу и решению практических задач. Студенты, сдающие зачет, предъявляют преподавателю тетрадь по практическим занятиям с выполненными заданиями, предусмотренными планом практикума. К сдаче допускаются студенты, которые выполнили контрольную работу и сдали зачет по практическим занятиям.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Теория выбора и принятия решений»: учебное пособие. И.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов. Москва, изд. «Наука», 1982.
2. «Теория вероятностей» Е.С. Вентцель. Москва, изд. «Наука», 1969.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Общие указания

Контрольная работа выполняется после изучения теоретического материала и состоит из двух задач. Только сознательное выполнение работы приносит пользу и помогает закреплению знаний. Работы, выполненные не по своему варианту, не рассматриваются.

При выполнении контрольной работы необходимо соблюдать следующие требования:

Указать номер варианта и привести перечень вопросов, подлежащих разработке.

Материалы контрольной работы располагать в такой последовательности: титульный лист, оглавление, ответы на вопросы основной части, список литературы.

Ответы на вопросы даются в виде пояснительного текста, расчетных формул с необходимыми иллюстрациями (схемами, эскизами, диаграммами и т.п.).

В тексте необходимо указывать в скобках порядковые номера литературных источников, стандартов, инструкций и руководств. Например: [2, с.18-22] и т.д.

Аккуратно оформить работу - выполнить четким почерком, в школьной тетради (объем 12 с.), оставив поля, пронумеровать страницы, оставить 1-2 страницы в конце работы для письменных замечаний рецензентов.

Исправления по замечаниям рецензента должны быть записаны отдельно на чистых листах той же тетради после заголовка "Исправления по замечаниям".

В конце работы привести список используемой литературы, оформленный в соответствии с требованиями, поставить дату и подпись.

Работу, в которой указанные требования не выполнены, не проверяют.

Выполненная контрольная работа представляется на кафедру для рецензирования за две недели до начала зачетно-экзаменационной сессии.

Если работа выполнена правильно, студент допускается к ее защите.

Ориентировочная трудоемкость выполнения одной контрольной работы составляет 8 ч.

Объем выполняемой работы по каждому заданию 2-3 с., контрольной работы в целом - 6-8 с.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1
АНАЛИЗ НАДЁЖНОСТИ УЗЛОВ И АГРЕГАТОВ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Основные понятия теории марковских цепей

Пусть $\{E_1, E_2, ..., E_r\}$ - множество возможных состояний некоторой физической системы. В любой момент времени система может находиться только в одном состоянии. С течением времени система переходит последовательно из одного состояния в другое. Каждый такой переход называется шагом процесса.

Для описания эволюции этой системы введем последовательность дискретных случайных величин ξ_0, ξ_1,..., ξ_n,... Индекс n играет роль времени. Если в момент времени n система находилась в состоянии E_j, то мы будем считать, что ξ_n = j. Таким образом, случайные величины являются номерами состояний системы.

Последовательность ξ_0, ξ_1,..., ξ_n,... образует цепь Маркова, если для любого n и любых k_0, k_1, ..., k_n,...

$$P(\xi_n = j \,/\, \xi_0 = k_0, \ldots, \xi_{n-1} = i) = P(\xi_n = j \,/\, \xi_{n-1} = i) \tag{1.1}$$

Для цепей Маркова вероятность в момент времени n попасть в состояние E_j, если известна вся предыдущая история изучаемого процесса, зависит только от того, в каком состоянии находился процесс в момент n-1. То есть при фиксированном "настоящем" "будущее" не зависит от "прошлого". Свойство независимости "будущего" от "прошлого" при фиксированном "настоящем" называется *марковским свойством*.

Вероятности $p_{ij}(n) = P(\xi_n = j \,/\, \xi_{n-1} = i)$, i, j=1,2,..., r называются вероятностями перехода из состояния E_i в состояние E_j за один шаг.

Цепь Маркова называется однородной, если вероятности перехода $p_{ij}(n)$ не зависят от n, т.е. если вероятности перехода не зависят от номера шага, а зависят только от того, из какого состояния и в какое осуществляется переход. Для однородных цепей Маркова вместо $p_{ij}(n)$ будем писать p_{ij}.

Вероятности перехода удобно располагать в виде квадратной матрицы

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1r} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Матрица P называется матрицей вероятностей перехода однородной цепи Маркова за один шаг. Она обладает следующими свойствами:

а) $p_{ij} \geq 0$;

б) для всех i: $\sum_{j=1}^{r} p_{ij} = 1$

Квадратные матрицы, для которых выполняются условия а) и б), называются *стохастическими*.

Вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_r)$, где a_i=P($\xi_0 = i$), i=1,2...,r называется вектором начальных вероятностей.

Свойства однородных цепей Маркова полностью определяются вектором начальных вероятностей и матрицей вероятностей перехода.

Приведем пример: Завод выпускает телевизоры определенного типа. В зависимости от того, находит ли данный тип телевизора спрос у населения, завод в конце каждого года может находиться в одном из состояний: состояние 1 – спрос есть, состояние 2 – спроса нет. Пусть вероятность сохранить состояние 1 в в следующем году с учетом возможного изменения спроса равна $\frac{4}{5}$, а вероятность изменить состояние 2 с учетом мероприятий по улучшению выпускаемой модели равна $\frac{3}{5}$. Тогда процесс производства на данном заводе можно описать цепью Маркова с матрицей переходов:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

В конкретных случаях для описания эволюции цепи Маркова вместо явного выписывания матрицы P используют граф, вершинами которого являются состояния цепи, а стрелка, идущая из состояния E_i в состояние E_j с числом p_{ij} над ней показывает, что из состояния E_i в состояние E_j возможен переход с вероятностью p_{ij}. В том случае, когда $p_{ij} = 0$, соответствующая стрелка не проводится.

Можно показать, что матрица вероятностей перехода цепи Маркова за n шагов равняется n-ой степени матрицы P вероятностей перехода за один шаг. Для однородной цепи Маркова при любом m выполняется равенство

$$\text{P}(\xi_{n+m} = j / \xi_m = i) = \text{P}(\xi_n = j / \xi_0 = i) \tag{1.4}$$

Но последняя вероятность есть вероятность перехода из состояния E_i в состояние E_j за n шагов.

Задача 1. Построить граф состояний элементов транспортного средства с учетом их отказов и определить надежность транспортного средства в целом, а также вероятности отказов работоспособности отдельных элементов. Данные для расчета взять из табл. 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные для расчета надежности

Элемент КШМ / Вариант	Блок цилиндров		Головка цилиндров		Гильзы цилиндров		Коленчатый вал		Шатун	
	$(\overline{L_i})$, тыс. км	$\overline{T_{вi}}$, ч	$(\overline{L_i})$, тыс. км	$\overline{T_{вi}}$, ч	$(\overline{L_i})$, тыс. км	$\overline{T_{вi}}$, ч	$(\overline{L_i})$, тыс. км	$\overline{T_{вi}}$, ч	$(\overline{L_i})$, тыс. км	$\overline{T_{вi}}$, ч
$V_{ср} = 28 км/ч$										
1	12	8	15	10	10	25	8,5	9	13	8
2	25	10	30	15	12	20	20	5	50	5
3	1	15	3,5	5	4,5	15	6	10	2	10
4	150	15	200	20	250	8	115	11	125	13
5	55	9	67	8	88	9	95	8	33	9
$V_{ср} = 38 км/ч$										
6	3,8	5	5,6	15	2,9	5	3,6	10	5,1	6
7	2	6	3	20	8	9	10	11	11	15
8	11	9	19	15	25	4	14	12	17	12
9	20	10	30	11	40	6	50	13	60	10
10	5	11	6	10	9	8	4	4	3	13
$V_{ср} = 48 км/ч$										
11	90	12	120	10	150	5	160	5	100	6
12	250	10	350	8	100	6	150	6	170	7
13	120	8	130	7	140	9	90	8	80	9
14	10	9	15	6	35	10	20	4	9	5
15	150	7	80	6	90	5	120	9	90	9
$V_{ср} = 58 км/ч$										
16	85	10	95	9	65	9	75	10	105	10
17	98	12	75	12	68	5	79	11	84	8
18	55	15	64	15	85	6	62	16	39	6
19	45	14	79	14	46	8	79	14	85	7
20	8,5	9	9,6	13	10,5	7	14,2	13	15,6	9
$V_{ср} = 68 км/ч$										
21	500	11	600	8	450	8	390	5	400	8
22	280	12	360	6	650	4	420	8	320	9
23	258	15	560	9	456	9	582	9	452	10
24	240	9	190	10	180	6	260	7	230	12
25	99	8	102	8	89	5	95	6	96	15

Пример решения. Для оценки надёжности агрегатов, узлов и элементов автомобиля широко применяются вероятностные методы. Одним из наиболее применяемых при описании функционирования основных элементов является математический аппарат однородных цепей Маркова. В этом случае проводится построение графа состояний элементов транспортного средства с учетом их отказов. Вероятности $P_0 \dots P_n$ нахождения элемента автомобиля в каждом из n состояний определяются из совокупности уравнений вероятностей нахождения элемента автомобиля в каждом из состояний:

$$\begin{cases} P_0 = \left(1 + \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2}{\mu_2} + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{\mu_n}\right)^{-1}; \\ P_1 = P_0 \cdot \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n = P_0 \cdot \dfrac{\lambda_n}{\mu_n}. \end{cases} \tag{1.5}$$

где $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ – интенсивность потока отказов соответствующих элементов;

$\mu_1 \ldots \mu_n$ – интенсивность потока восстановления соответствующих элементов.

Рассматривая, например, структуру КШМ двигателя ЗИЛ – 130 (рис. 1.1), выделим пять элементов, граф которых может находиться в исправном состоянии S_0, а также в состояниях, вызванных отказами: S_1 – ремонт блока цилиндров; S_2 – ремонт головки цилиндров; S_3 – ремонт гильз цилиндров; S_4 – ремонт коленчатого вала; S_5 – ремонт шатуна.

Исследование параметров потока отказов функционирования элементов КШМ двигателя ЗИЛ – 130 были произведены по результатам, полученным в реальных условиях эксплуатации и ремонта на предприятии грузовых перевозок ГОАО ТП “Уголь” (г. Краснодон). Данные по наработке на отказ и времени ремонта (восстановления) приведены в табл. 1.1.

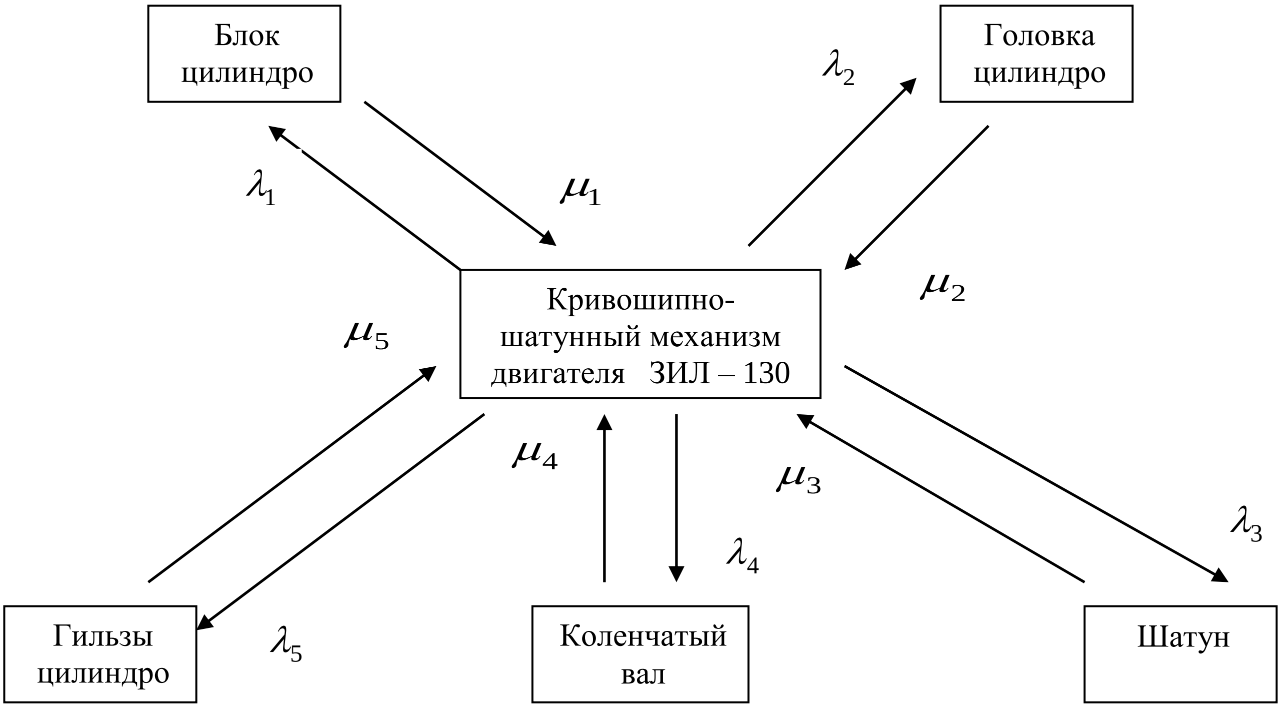


Рисунок 1.1 – Граф состояния кривошипно-шатунного механизма двигателя ЗИЛ – 130 с учетом отказа функционирования его элементов

Среднее время между двумя отказами $\overline{T_i}$ соответствующих элементов КШМ, а также среднее время ремонта (замены, восстановления) $\overline{T_{вi}}$ элементов вышедших из строя подсчитывается на основе данных технической службы. Число дефектов соотносится с общим числом КШМ из общей возрастной группы (до 25 лет эксплуатации).

Таблица 1.1 – Исходные данные для расчета надежности элементов КШМ двигателя ЗИЛ – 130

№	Элемент КШМ	Наработка на отказ		λ_i, ч	$\overline{T_{вi}}$, ч	μ_i, ч
		$\overline{L_i}$, тыс. км	$\overline{T_i}$, ч			
1	Блок цилиндров	265	7571,4	0,00013	6,5	0,154
2	Головка цилиндров	245	7000	0,00014	5,3	0,189
3	Гильзы цилиндров	200	5714,3	0,00018	4,8	0,208
4	Коленчатый вал	215	6142,9	0,00016	5,6	0,179
5	Шатун	210	6000	0,00017	3,9	0,256

В качестве одной из составляющих интенсивности потока отказов принят средний пробег $\left(\overline{L_i}\right)$ автомобиля до отказа соответствующего элемента, который затем пересчитан через среднюю скорость $\left(V_{cp}\right)$ при эксплуатации автомобиля в среднее время между отказами соответствующего элемента:

$$\overline{T_i} = \frac{\overline{L_i}}{V_{cp}} \tag{1.6}$$

Интенсивности потока отказов и потока восстановления соответственно равны:

$$\lambda_i = \frac{1}{\overline{\overline{T_i}}}, \qquad \mu_i = \frac{1}{\overline{\overline{T_{вi}}}} \tag{1.7, 1.8}$$

Интенсивности λ_i и μ_i каждого элемента подставляются в уравнение вероятностей, и подсчитывается вероятность безотказной работы P_0 КШМ, а также вероятность соответствующих отказов $P_1 ... P_5$.

Результаты расчетов по данным предприятия грузовых перевозок ГОАО ТП “Уголь” представлены в табл. 1.2 и на диаграмме по оценке надежности различных элементов КШМ двигателя ЗИЛ – 130 на рис. 1.2.

Таблица 1.2 – Результаты расчетов надежности элементов КШМ двигателя ЗИЛ – 130

№	Показатели надежности	Условное обозначение	Значение
1	Вероятность безотказной работы КШМ	P_0	0,99601
2	Вероятность отказа работоспособности блока цилиндров	P_1	0,00084
3	Вероятность отказа работоспособности головки блока цилиндров	P_2	0,00074
4	Вероятность отказа работоспособности гильз цилиндров	P_3	0,00086
5	Вероятность отказа работоспособности коленчатого вала	P_4	0,00089
6	Вероятность отказа работоспособности шатуна	P_5	0,00066

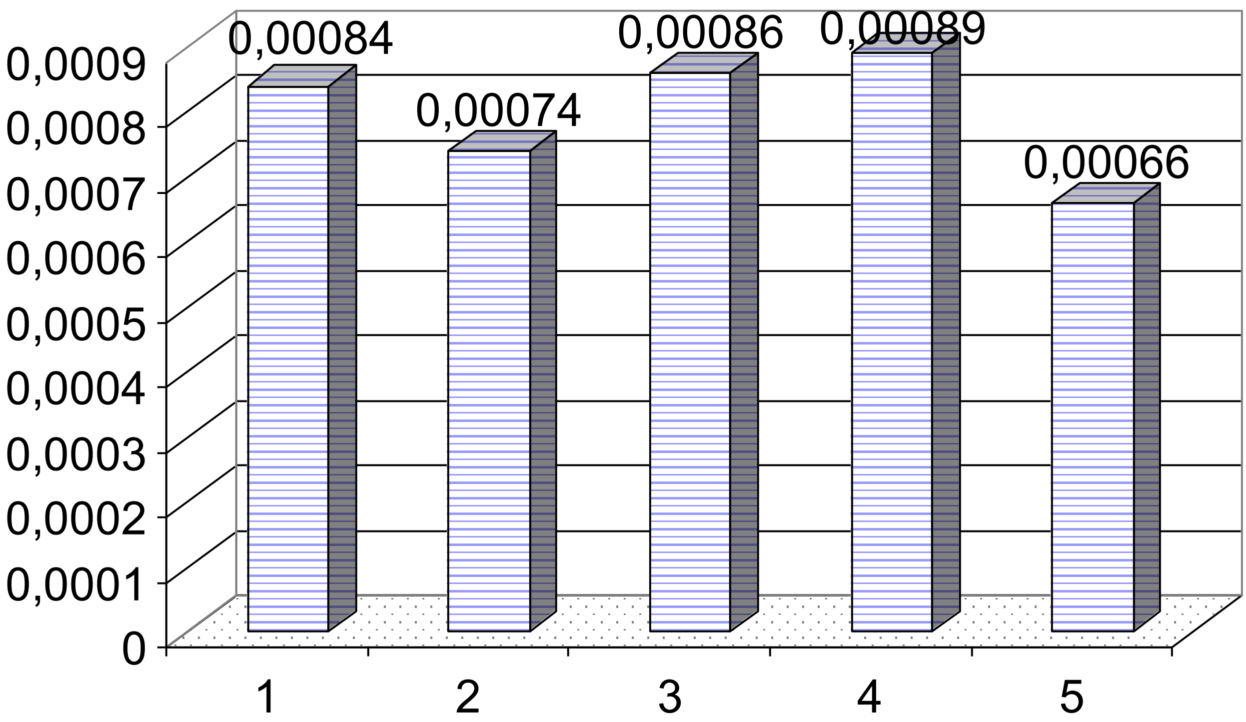


Рисунок 1.2 – Диаграмма вероятности отказа элементов КШМ двигателя ЗИЛ – 130:
1 – блок цилиндров; 2 – головка цилиндров; 3 – гильзы цилиндров; 4 – коленчатый вал; 5 – шатун

Проведенные исследования позволили выявить наименее надежные элементы КШМ двигателя ЗИЛ – 130, к таким элементам следует отнести: коленчатый вал, гильзы цилиндров, а также блок цилиндров.

Указанные элементы в первую очередь нуждаются в усовершенствовании технологического процесса изготовления и сборки.

КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

1 Математический аппарат

Для понимания всего дальнейшего полезно знать и представлять себе геометрическую интерпретацию задач линейного программирования, которую можно дать для случаев n =2 и n =3.

Наиболее наглядна эта интерпретация для случая n =2, т.е. для случая двух переменных x_1 и x_2. Пусть нам задана задача линейного программирования в стандартной форме

$$\begin{aligned} c_1x_1 \quad &+c_2x_2 \Rightarrow \max \\ a_{11}x_1 \quad &+a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 \quad &+a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \quad &\dots\dots \\ a_{m1}x_1 \quad &+a_{m2}x_2 \le b_m, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Возьмём на плоскости декартову систему координат и каждой паре чисел (x_1, x_2) поставим в соответствие точку на этой плоскости.

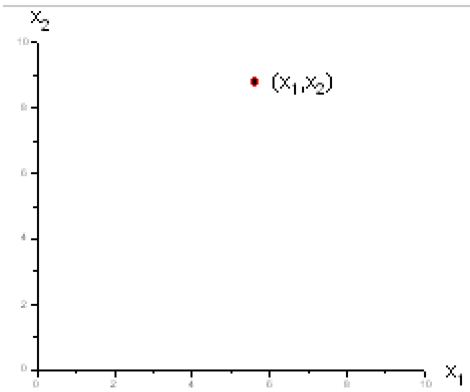


Рисунок 2.1

Обратим прежде всего внимание на ограничения $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$. Они из всей плоскости вырезают лишь её первую четверть (см. рис. 2.1). Рассмотрим теперь, какие области соответствуют неравенствам вида $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$. Сначала рассмотрим область, соответствующую равенству $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Как Вы, конечно, знаете, это прямая линия. Строить её проще всего по двум точкам.

Пусть $b \ne 0$. Если взять $x_1 = 0$, то получится $x_2 = b / a_2$. Если взять $x_2 = 0$, то получится $x_1 = b / a_1$. Таким образом, на прямой лежат две точки $(0, b / a_2)$ и $(b / a_1, 0)$. Дальше через эти две точки можно по линейке провести прямую линию (см. рис. 2.2).

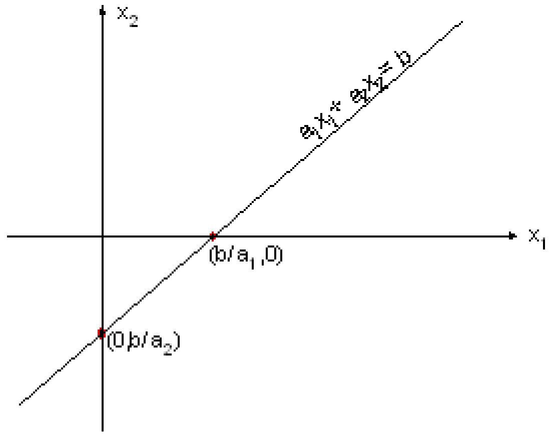


Рисунок 2.2

Если же b=0, то на прямой лежит точка (0,0). Чтобы найти другую точку, можно взять любое отличное от нуля значение x_1и вычислить соответствующее ему значение x_2.

Эта построенная прямая разбивает всю плоскость на две полуплоскости. В одной её части $a_1x_1+a_2x_2<b$, а в другой наоборот $a_1x_1+a_2x_2>b$. Узнать, в какой полуплоскости какой знак имеет место проще всего посмотрев, какому неравенству удовлетворяет какая-то точка плоскости, например, начало координат, т.е. точка (0,0).

2 Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу ЛП в стандартной форме записи:

$$\max f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (*)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\le b_2 \end{aligned} \quad (**)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m (***)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим эту задачу на плоскости, т.е. при $n = 2$. Пусть система неравенств (**), (***) совместна (имеет хотя бы одно решение):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i\ i = \overline{1, m}$. Условия неотрицательности определяют полуплоскости соответственно с граничными прямыми $x_1 = 0;\ x_2 = 0$. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых составляют решение данной системы. Совокупность этих точек называют *многоугольником решений.* Это может быть точка, отрезок, луч, замкнутый многоугольник, неограниченная многоугольная область.

Если в системе ограничений (**) - (***) n = 3, то каждое неравенство геометрически представляет полупространство трехмерного пространства, граничная плоскость которого $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_1 \le b_i$, а условия неотрицательности — полупространства с граничными плоскостями соответственно $x_i = 0\ (i = 1, 2, 3)$. Если система ограничений совместна, то эти полупространства, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют в трехмерном пространстве общую часть, которая называется *многогранником решений*.

Пусть в системе (**) - (***) $n > 3$, тогда каждое неравенство определяет полупространство n-мерного пространства с граничной гиперплоскостью $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i\ i = \overline{1, m}$, а условия неотрицательности — полупространства с граничными гиперплоскостями $x_j = 0,\ j = \overline{1, n}$.

Если система ограничений совместна, то по аналогии с трехмерным пространством она образует общую часть n-мерного пространства, называемую многогранником решений, так как координаты каждой его точки являются решением.

Таким образом, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной функции минимальное значение, причем допустимыми решениями служат все точки многогранника решений.

3 Этапы решения графического метода задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трехмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трех изобразить графически вообще невозможно.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, т. е. ограничения содержат две переменные.

Если в ЗЛП ограничения заданы в виде неравенств с двумя переменными, она может быть решена графически. Графический метод решения ЗЛП состоит из следующих этапов.

Этап 1.

Сначала на координатной плоскости x1Ox2 строится допустимая многоугольная область (область допустимых решений, область определения), соответствующая ограничениям:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{array} \qquad (2.2)$$

Не приводя строгих доказательств, укажем те случаи, которые тут могут получится.

1. **Основной случай** - получающаяся область имеет вид ограниченного выпуклого многоугольника (рис. 1.3 а)).
2. **Неосновной случай –** получается неограниченный выпуклый многоугольник, имеющий вид, подобный изображенному на рис. 1.3.б. Подобная ситуация, например, получится, если в рассмотренном выше примере убрать

ограничение $x_1 + x_2 \le 3$. Оставшаяся часть будет неограниченным выпуклым многоугольником.

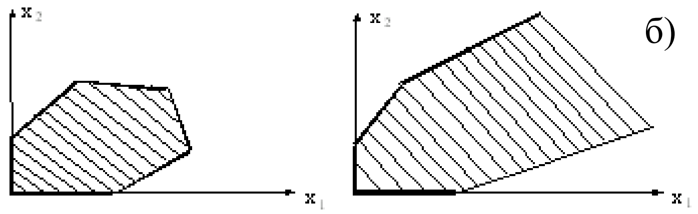


Рисунок 1.3

Наконец, возможен случай, когда неравенства (2.2) **противоречат друг другу**, и допустимая область вообще **пуста**.

Рассмотрим теорию на конкретном примере:

Найти допустимую область задачи линейного программирования, определяемую ограничениями

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

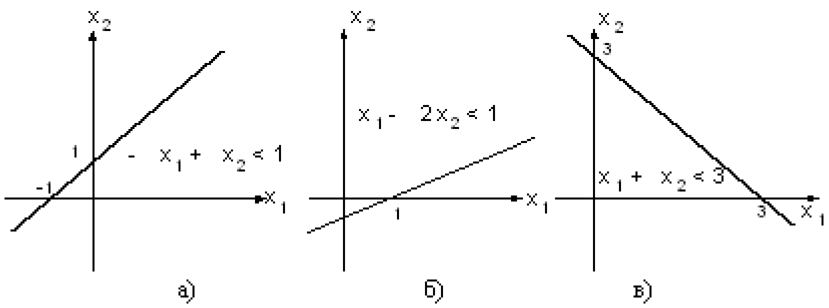


Рисунок 1.4

Решение:

1. Рассмотрим прямую $-x_1 + x_2 = 1$. При $x_1 = 0$ $x_2 = 1$, а при $x_2 = 0$ $x_1 = -1$. Таким образом, эта прямая проходит через точки (0,1) и (-1,0). Беря $x_1 = x_2 = 0$ получим, что -0+0<1 и поэтому интересующая нас полуплоскость лежит ниже прямой, изображенной на рис. 1.4.а.
2. Рассмотрим прямую $x_1 - 2x_2 = 1$. При $x_1 = 0$ $x_2 = -1/2$, а при $x_2 = 0$ $x_1 = 1$. Таким образом, эта прямая проходит через точки (0, -1/2) и (1,0). так как $0 - 2 \cdot 0 < 1$ (1.4.б).
3. Наконец, рассмотрим прямую $x_1 + x_2 = 3$. Она проходит через точки (0,3) и (3,0) и так как 0+0<3, то интересующая нас полуплоскость лежит ниже прямой, изображенной на рис. 1.4.в.

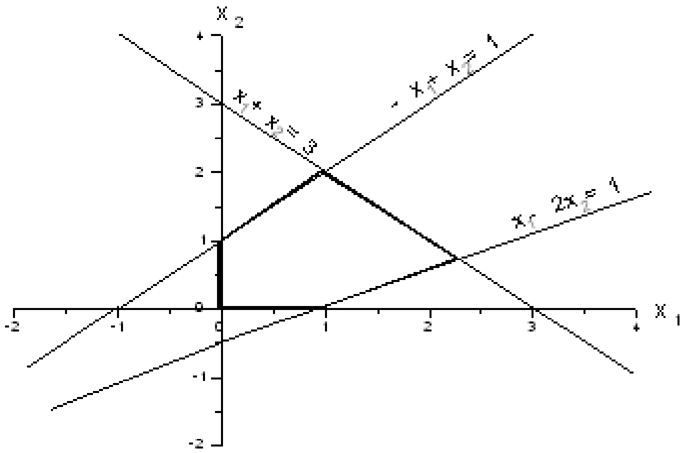


Рисунок 1.5

Сводя все вместе и добавляя условия $x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$ получим рисунок 1.5, где выделена область, в которой выполняются одновременно все ограничения (2.3). Обратите внимание на то, что получившаяся область имеет вид **выпуклого многоугольника**.

Этап 2.

Вернёмся теперь к исходной задаче линейного программирования. В ней, кроме системы неравенств, есть еще **целевая функция** $c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow \max$.

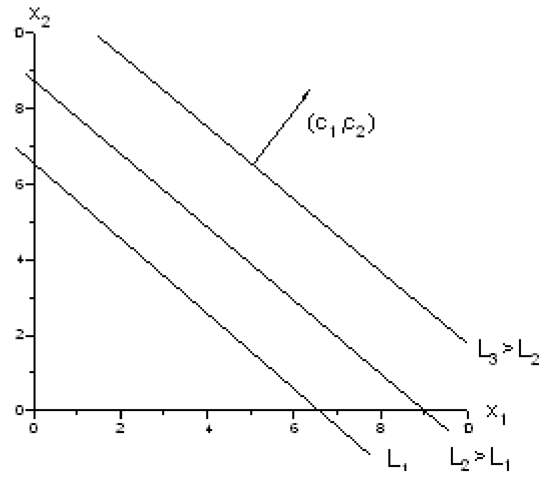


Рисунок 1.6

Рассмотрим прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = L$. Будем увеличивать L. Что будет происходить с нашей прямой?

Легко догадаться, что прямая будет двигаться параллельно самой себе в том направлении, которое дается вектором (c_1, c_2), так как это – вектор нормали к нашей прямой и одновременно вектор градиента функции $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$.

А теперь сведем всё вместе. Итак, надо решить задачу

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow \max \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m,
\end{aligned}
$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Ограничения задачи вырезают на плоскости некоторый многоугольник. Пусть при некотором *L* прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ пересекает допустимую область. Это пересечение дает какие-то значения переменных (x_1, x_2), которые являются планами.

Этап 3

Увеличивая *L* мы начнем двигать нашу прямую, и её пересечение с допустимой областью будет изменяться (см. рис. 1.7). В конце концов, эта прямая выйдет на границу допустимой области – как правило, это будет одна из **вершин многоугольника**. Дальнейшее увеличение L приведёт к тому, что пересечение

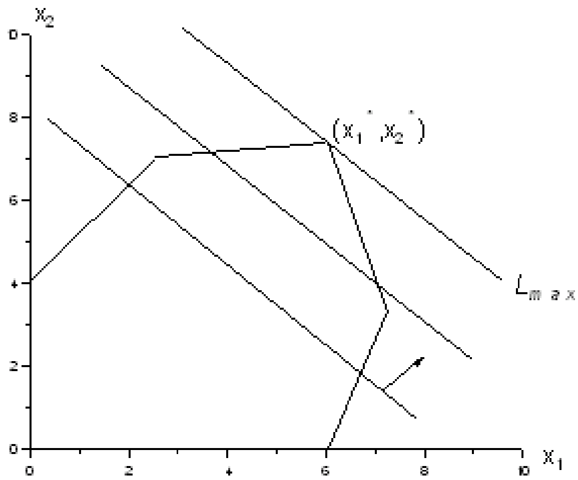


Рисунок 1.7

прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ с допустимой областью будет пустым. Поэтому то положение прямой $c_1x_1 + c_2x_2 = L$, при котором она вышла на граничную точку допустимой области, и даст решение задачи, а соответствующее значение L и будет оптимальным значением целевой функции.

4 Примеры задач, решаемых графическим методом

Пример:

Решить задачу

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 \Rightarrow \max\\
&-x_1 + x_2 \le 1,\\
&x_1 - 2x_2 \le 1,\\
&x_1 + x_2 \le 3,\\
&x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.
\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Решение

Допустимую область мы уже строили – она изображена на рис. 1.5.

Повторим еще раз этот рисунок, оставив только допустимую область и нарисовав дополнительно прямые $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ (см. рис. 1.8).

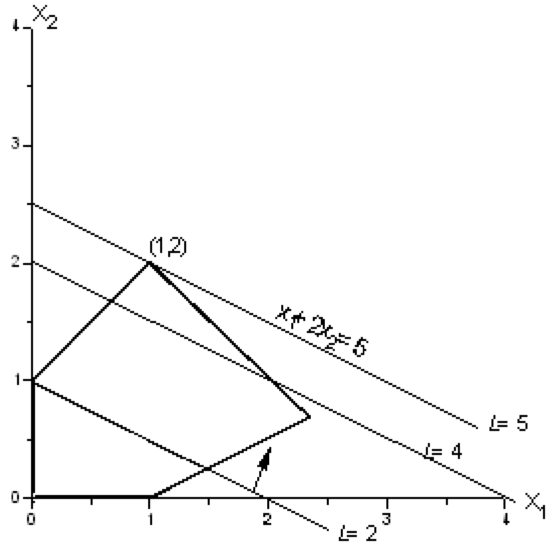


Рисунок 1.8

Пусть, например, L=2. Тогда прямая $x_1 + 2x_2 = 2$ проходит через точки (2,0) и (0,1) и изображена на рис. 1.8. Будем теперь увеличивать L. Тогда прямая начнёт двигаться параллельно самой себе в направлении, указанном стрелкой. Легко догадаться, что максимальное значение L получится тогда, когда прямая пройдет через вершину многоугольника, указанную на рисунке, и дальнейшее увеличение L приведет к тому, что прямая выйдет за пределы многоугольника и её пересечение с допустимой областью будет пустым.

Выделенная вершина лежит на пересечении прямых

$$-x_1 + x_2 = 1,$$
$$x_1 + x_2 = 3$$

и поэтому имеет координаты $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Это и есть решение нашей задачи, т.е. $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ есть оптимальный план задачи (2.4). При этом значение целевой функции $L = 1 + 2 \cdot 2 = 5$, что и дает её максимальное значение.

Обратите внимание на то, что оптимальный план, как правило, соответствует какой-то вершине многоугольника, изображающего допустимую область. И лишь в том случае, когда прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = L$ случиться так, что решение не будет единственным. Но и в этом случае вершины, соответствующие границам этой стороны, дают оптимальные планы нашей задачи линейного программирования.

Таким образом, вершины допустимой области играют в решении задач линейного программирования особую роль.

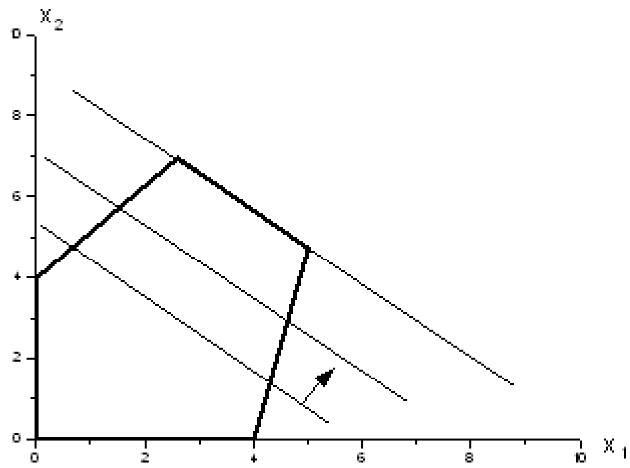


Рисунок 1.9

Ну, а если допустимая область неограниченна, то и значение целевой функции может быть неограниченным.

Подводя итог этим примерам, можно сформулировать следующие положения:

1. допустимая область – это выпуклый многоугольник;
2. оптимум достигается в вершине допустимой области (если допустимая область ограничена и не пуста);
3. ограниченность целевой функции в допустимой области является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи.

Задача 2. Предприятие располагает тремя видами сырья и может выпускать одну и ту же продукцию двумя способами. При этом за час работы первым способом выпускается A единиц продукции, а вторым – B. Количество сырья (кг) того или иного вида, расходуемого за 1 ч при различных способах производства, и запасы сырья (кг) приведены в таблице 2.1. Требуется найти план производства, при котором будет выпущено наибольшее количество продукции.

Таблица 2.1 – Исходные данные

Способы производства	Сырье			A	B
	1	2	3		
Вариант №1					
Первый	25	13	12	40	50
Второй	25	24	26		
Запасы сырья	120	110	90		
Вариант №2					
Первый	18	56	5	60	45
Второй	17	34	15		
Запасы сырья	85	101	80		
Вариант №3					
Первый	21	12	10	25	60
Второй	51	59	30		
Запасы сырья	85	89	50		
Вариант №4					
Первый	21	25	10	50	60
Второй	55	35	30		
Запасы сырья	80	95	40		
Вариант №5					
Первый	45	87	40	90	70
Второй	65	56	10		
Запасы сырья	120	135	90		
Вариант №6					
Первый	54	90	55	95	75
Второй	65	10	45		
Запасы сырья	200	150	190		
Вариант №7					
Первый	10	75	15	80	60
Второй	55	25	30		
Запасы сырья	100	120	50		
Вариант №8					
Первый	65	35	46	70	65
Второй	55	46	37		
Запасы сырья	150	126	100		
Вариант №9					
Первый	64	25	62	75	40
Второй	32	34	17		
Запасы сырья	110	75	100		
Вариант №10					
Первый	24	64	54	80	85
Второй	17	69	11		
Запасы сырья	50	156	80		

Продолжение **Табл 2.1**

Способы производства	Сырье			A	B
	1	2	3		
Вариант №11					
Первый	41	54	52	75	85
Второй	78	26	68		
Запасы сырья	136	89	168		
Вариант №12					
Первый	56	12	45	65	35
Второй	24	16	10		
Запасы сырья	95	65	95		
Вариант №13					
Первый	12	10	16	50	70
Второй	32	5	54		
Запасы сырья	56	35	80		
Вариант №14					
Первый	26	15	65	50	90
Второй	45	65	80		
Запасы сырья	150	170	200		
Вариант №15					
Первый	45	54	54	65	100
Второй	12	98	62		
Запасы сырья	150	200	190		
Вариант №16					
Первый	22	33	44	55	65
Второй	11	22	55		
Запасы сырья	50	70	110		
Вариант №17					
Первый	54	21	48	65	75
Второй	65	51	12		
Запасы сырья	200	100	80		
Вариант №18					
Первый	25	65	23	70	30
Второй	15	15	21		
Запасы сырья	50	100	65		
Вариант №19					
Первый	25	32	65	75	85
Второй	65	12	45		
Запасы сырья	125	78	52		
Вариант №20					
Первый	12	24	54	70	45
Второй	15	36	12		
Запасы сырья	40	80	100		

Продолжение **Табл 2.1**

Способы производства	Сырье			A	B
	1	2	3		
Вариант №21					
Первый	12	10	65	85	55
Второй	31	5	45		
Запасы сырья	60	35	150		
Вариант №22					
Первый	25	65	25	80	90
Второй	35	15	45		
Запасы сырья	100	120	110		
Вариант №23					
Первый	25	15	35	55	35
Второй	20	10	20		
Запасы сырья	100	50	70		
Вариант №24					
Первый	15	25	20	35	45
Второй	35	25	25		
Запасы сырья	55	60	50		
Вариант №25					
Первый	10	50	20	80	85
Второй	5	10	65		
Запасы сырья	25	100	120		

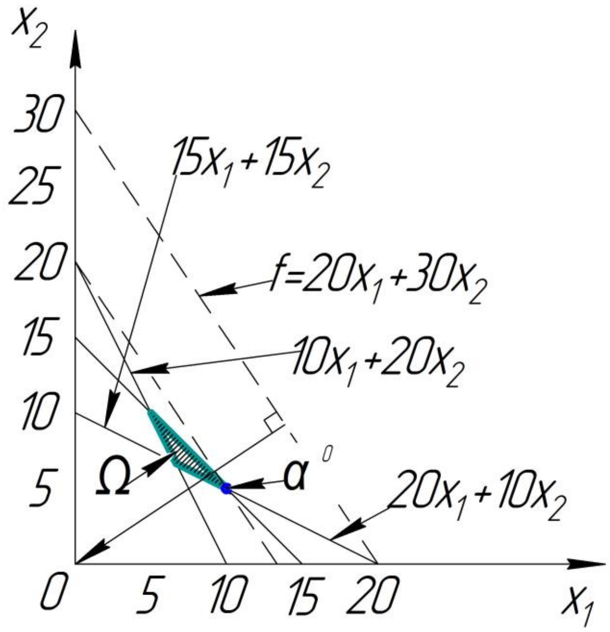
Пример решения. Предприятие располагает тремя видами сырья и может выпускать одну и ту же продукцию двумя способами. При этом за час работы первым способом выпускается 20 единиц продукции, а вторым – 30. Количество сырья (кг) того или иного вида, расходуемого за 1 ч при различных способах производства, и запасы сырья (кг) приведены в таблице. Требуется найти план производства, при котором будет выпущено наибольшее количество продукции.

Способы производства	Сырье		
	1	2	3
Первый	10	20	15
Второй	20	10	15
Запасы сырья	100	100	90

Обозначим через x_1 и x_2 время (ч) использования соответственно первого и второго способов производства. Имеем задачу линейного программирования $f = 20x_1 + 30x_2 (\max)$:

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 \le 100 \\ 20x_1 + 10x_2 \le 100 \\ 15x_1 + 15x_2 \le 90 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Которую можно решить графическим способом. На рис. Изображены допустимое множество Ω и оптимальное решение α^0 этой задачи.



Любая точка из допустимого множества Ω является планом работы предприятия, для реализации которого хватит имеющихся запасов сырья. Оптимальное решение α^0 - это план из допустимого множества Ω, при котором будет выпущено наибольшее количество продукции.

Очевидно, что α^0 является точкой пересечения прямых и имеющих уравнения:

$$20x_1 + 10x_2 = 100$$
$$15x_1 + 15x_2 = 90$$

соответственно. Решая систему этих двух уравнений, получаем $x_1 = 4$; $x_2 = 2$.

Таким образом, для производства наибольшего количества продукции при имеющихся запасах сырья необходимо 4 ч применять первый способ производства и 2 ч – второй.

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к самостоятельной работе по изучению дисциплины
ТЕОРИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ
(для студентов обучающихся по направлению подготовки "Автомобильный транспорт 6.070106", "Машиностроение 6.050503")

Составитель:

Денис Владимирович ДУДА

Редактор

Техн. редактор

Оригинал-макет